INSTITUT NATIONAL SUPERIEUR DE CHIMIE INDUSTRIELLE DE ROUEN 1982

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Les trois exercices sont indépendants

PREMIER EXERCICE

1. On définit deux réels I et J par :

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^4 + 1}} \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + 1}}.$$

Établir l'existence de J. Montrer : $J = 2I$.

2. *a.* En utilisant la formule de Mac-Laurin, trouver deux fonctions polynômes P et Q, de degrés respectifs 4 et 5, telles que, pour tout u de [0,1] :

$$Q(u) \leqslant \frac{1}{\sqrt{u + 1}} \leqslant P(u).$$

b. En déduire un encadrement de I par deux nombres décimaux.

3. Soit a un réel strictement positif. Étudier et représenter graphiquement la fonction f définie par :

$$f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + a^4}}.$$

Les limites de f en 0 et en $+\infty$ seront exprimées à l'aide de I et de a. On ne cherchera pas à préciser les ordonnées des points de la courbe à tangente parallèle à Ox.

DEUXIÈME EXERCICE

Toutes les matrices qui interviennent dans cet exercice appartiennent à l'ensemble E *des matrices carrées d'ordre 2, à éléments dans* $\mathbb{C}$.

1. On pose :

$$A = \begin{bmatrix} 4,5 & -3,5 \\ -3,5 & 4,5 \end{bmatrix}$$

Montrer qu'il existe, dans E, une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $D = P^{-1}AP$.

Expliciter D, P, P^{-1}.

Les questions 2 et 3 sont indépendantes

2. Soit t un réel. A tout entier n, positif ou nul, on associe les réels a_n, b_n, c_n et d_n tels que :

$$\begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (tA)^{2k+1}.$$

Montrer que, quand n tend vers l'infini, a_n, b_n, c_n et d_n ont des limites que l'on déterminera.

3. On rappelle que :

— à toute matrice X de E, on peut associer une matrice de E, triangulaire supérieure, semblable à X.

— deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

a. Soit X une matrice de E. Trouver les valeurs propres de X^3 en fonction celles de X.

b. On suppose qu'il existe, dans E, X telle que $X^3 = A$. Montrer que X est diagonalisable. Comparer les sous-espaces propres de X et ceux de A.

c. Étudier l'équation $X^3 = A$, où l'inconnue X est dans E. Exprimer toutes ses solutions à l'aide de deux nombres α et β pris dans l'ensemble des racines cubiques de 1. Combien l'équation a-t-elle de solutions?

.../...

TROISIÈME EXERCICE

Soient :

(A) un plan affine euclidien;

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de (A);

Ox et Oy les axes d'origine O, de vecteurs unitaires respectifs $\vec{i}$ et $\vec{j}$; a un réel strictement positif.

Un point M est mobile dans (A) de façon que ses coordonnées à tout instant t soient :

$$\begin{cases} x = a(3\cos t - \cos 3t) \\ y = a(3\sin t - \sin 3t) \end{cases}$$

1. Construire la trajectoire (C) de M.

Pour la figure, on prendra $a = 1$ et une unité de longueur égale à 2 centimètres

2. Calculer :

   a. La longueur de la partie de (C) décrite par M lorsque t décrit l'intervalle $[0, \pi]$.

   b. L'aire de la partie (D) de (A), qui a pour frontière (C), et qui contient O.

3. *a.* Calculer, à un instant quelconque, les composantes des vecteurs accélération tangentielle et accélération normale de M. (*On pourra utiliser le produit scalaire des vecteurs vitesse et accélération.*)

   b. Soient P et Q les positions de M aux instants respectifs t et $\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$.

   Déduire des résultats de (3.*a*) le rayon de courbure et les coordonnées x_I et y_I du centre de courbure I de (C) en P.

c. Exprimer l'affixe $z_I = x_I + iy_I$ de I en fonction de l'affixe de Q. En déduire que l'ensemble (Γ) décrit par I lorsque P décrit (C) est le transformé de (C) par une transformation géométrique simple que l'on définira.

d. Représenter soigneusement sur la figure de la question 1, sans autres explications, (Γ), et, pour $t = \frac{\pi}{6}$, les points P, Q, I, ainsi que la normale à (C) en P.

1961

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail